Научная статья
УДК 517.958
DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-3-63-94

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ С НЕЛИНЕЙНЫМ КВАДРАТИЧНЫМ ПОГЛОЩЕНИЕМ

Владимир Гаврилович Романов[1]
Татьяна Владимировна Бугуева[2]

[1,2]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
[2] Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия,

[1]romanov@math.nsc.ru
[2]bugueva@math.nsc.ru

Аннотация

Рассматривается обратная задача определения двух неизвестных функций $\sigma_0(x)$ и $\sigma_1(x)$, входящих в коэффициент поглощения $\sigma(x, u^2) = \sigma_0 + \sigma_1 u^2$ в уравнении электродинамики. Получена априорная оценка решения прямой задачи, доказаны теоремы существования и единственности решений прямой и обратной задач.

Ключевые слова и фразы

нелинейное уравнение, электродинамика, обратная задача, локальное существование.

Источник финансирования

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева (проект FWNF-2022-0009)

Для цитирования

Романов В. Г., Бугуева Т. В. Обратная задача для уравнения электродинамики с нелинейным квадратичным поглощением // *Математические труды*, 2025, Т. 28, № 3, С. 63-94. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-3-63-94

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 63-94
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 63-94

An inverse problem for an electrodynamics equation with nonlinear quadratic absorption

Vladimir G. Romanov[1], Tatiana V. Bugueva[2],

[1]Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
[1,2]Novosibirsk State University,
Novosibirsk, Russia

[1]romanov@math.nsc.ru
[2]bugueva@math.nsc.ru

Abstract

An inverse problem of determining two unknown functions $\sigma_0(x)$ and $\sigma_1(x)$ included in the absorption coefficient $\sigma(x,u^2) = \sigma_0 + \sigma_1 u^2$ of an electrodynamics equation is considered. An a priori estimate for a solution of a direct problem is obtained, and existence and uniqueness theorems of solutions to the direct and an inverse problems are proved.

Keywords

nonlinear equation, electrodynamics, inverse problem, local existence.

Funding

The work is done within framework of state contract of Sobolev institute of Mathematis (project FWNF-2022-0009)

For citation

Romanov V. G., Bugueva T. V., An inverse problem for an electrodynamics equation with nonlinear quadratic absorption // *Mat. Trudy*, 2025, T. 28, № 3, C. 63-94. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-3-63-94

§ 1. Введение и постановки задач

Обратные задачи об определении коэффициентов в нелинейных гиперболических уравнениях или системах интенсивно изучаются в последние годы.

В работах [1]–[3] исследованы задачи, в которых волновой оператор рассматривается на лоренцевом многообразии, а само уравнение является квазилинейным. При этом изучены задачи об определении либо лоренцевой метрики, либо коэффициентов при нелинейностях. В [4]–[9] изучены

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 63-94
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 63-94

обратные задачи об определении коэффициента при младшем нелинейном члене волнового уравнения. В работе [10] рассмотрена одномерная обратная задача определения коэффициента при степенной градиентной нелинейности. Доказана теорема о локальном существовании её решения и найдена оценка устойчивости решения. В [11] рассматривается гиперболическое уравнение с переменной главной частью и нелинейностью в младшем члене. Показывается, что решение обратной задачи сводится к некоторой задаче интегральной геометрии. Эта задача изучена и на её основе, установлена оценка устойчивости решения рассматриваемой обратной задачи. В работе [12] для гиперболического уравнения второго порядка, содержащего два нелинейных члена, изучена обратная задача заключающаяся о определении коэффициентов при нелинейностях. Рассматриваемая обратная задача сводится к двум последовательно решаемым задачам интегральной геометрии. Для этих задач найдены оценки устойчивости решений.

В работах [13]–[20] рассматривались различные постановки обратных задач для уравнений электродинамики. В [16] с помощью вариационных методов рассматривается класс систем Клейна — Гордона — Максвелла с типом вогнуто–выпуклой нелинейности. Неизвестными в системе являются поле u, связанное с частицей, и электрический потенциал ϕ. Исследован вопрос существования решения в зависимости от параметра, входящего в уравнение. В [18] рассматривается абстрактная задача Коши для системы Максвелла, моделирующая электромагнитные поля при наличии границы раздела между оптическими средами. В работе в рамках эволюционных уравнений доказывается корректность в функциональных пространствах, экспоненциально взвешенных во времени и имеющих различную пространственную регулярность. В [19] рассматривается обратная задача об определении переменного коэффициента проводимости для системы уравнений электродинамики с нелинейной проводимостью. В качестве информации для решения обратной задачи задается модуль вектора электрической напряженности поля для некоторого диапазона направлений падающей плоской волны и для моментов времени, близких к приходу волны в точки поверхности шара, внутри которого содержится неоднородность. Показывается, что эта информация приводит обратную задачу к задаче рентгеновской томографии, алгоритмы численного решения которой хорошо разработаны. В работе [20] исследована обратная задача определения двух неизвестных функций $\sigma_0(x)$ и $\sigma_1(x)$, входящих в коэффициент поглощения $\sigma(x,u) = \sigma_0(x) + \sigma_1(x)u$ в уравнении электродинамики. Доказаны теоремы существования и единственности решений прямой и обратной задач.

В настоящей работе рассматривается обратная задача для одномерного уравнения электродинамики с нелинейным квадратичным поглощением вида $\sigma(x,u^2)=\sigma_0(x)+\sigma_1(x)u^2$. Ранее эта задача никем не исследовалась. Ниже мы формулируем постановку прямой и обратных задач. В следующем разделе изучается прямая задача, устанавливается теорема о существовании и единственности её решения. Затем рассматривается обратная задача, строится замкнутая система нелинейных интегральных уравнений задачи, доказывается теорема об однозначной локальной разрешимости этой системы уравнений.

Рассмотрим уравнения

$$\begin{gathered} u_{tt}+(\sigma_0+\sigma_1 u^2)u_t-u_{xx}=0, \quad x>0, t\in[0,T], \\ u|_{x=0}=A, \quad t\in[0,T]; \quad u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0, \end{gathered} \tag{1}$$

в которых A и T — положительные числа; $\sigma(x,u^2)=\sigma_0+\sigma_1u^2$, где $\sigma_0(x)$, $\sigma_1(x)$ — положительные гладкие функции.

Уравнение (1) возникает при описания электромагнитных волн распространяющихся вдоль оси x в случае, когда сила тока нелинейно зависит от электрического напряжения (см. Приложение).

Прямая задача. В области $G_T=\{(x,t)\mid x\geqslant 0,\ t\geqslant 0,\ x+t\leqslant T\}$ найти функцию $u(x,t)$ при постоянных T, A и заданных функциях $\sigma_0(x)$, $\sigma_1(x)$.

Обозначим $u(x,t,A)$ — решение прямой задачи.

Обратная задача. Найти функции $\sigma_0(x)$, $\sigma_1(x)$ для $x\in[0,T/2]$ по заданным функциям

$$f_m(t)=u_x(0,t,A_m), \quad t\in[0,T], \quad m=1,2, \tag{2}$$

при $A_1\neq A_2$.

§ 2. Исследование прямой задачи

Решение прямой задачи $u(x,t)=0$ для $0<t<x<T-t$. Представим $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t)=\theta_0(t-x)[\alpha(x)+\hat{u}(x,t)], \quad x\geqslant 0, \quad t\geqslant 0, \quad x+t\leqslant T, \tag{3}$$

где $\theta_0(t)$ — функция Хевисайда и $\hat{u}(x,x+0)=0$. Подставляя (3) в (1) и приравнивая нулю коэффициент при $\delta(t-x)$, получим соотношения для нахождения функции $\alpha(x)$

$$2\alpha'(x)+[\sigma_0(x)+\sigma_1(x)\alpha^2(x)]\alpha(x)=0, \quad \alpha(0)=A. \tag{4}$$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 63-94
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 63-94

Отсюда можем записать уравнение

$$-\frac{2\alpha'(x)}{\alpha^3(x)} = \frac{\sigma_0(x)}{\alpha^2(x)} + \sigma_1(x),$$

которое в терминах функции $y(x) := 1/\alpha^2(x)$ принимает вид

$$y'(x) = \sigma_0(x)y(x) + \sigma_1(x).$$

Решение этого линейного уравнения с условием $y(0) = 1/A^2$ даётся формулой

$$y(x) = \left[\frac{1}{A^2} + \int\limits_0^x \sigma_1(\xi)\exp\left(-\int\limits_0^\xi \sigma_0(\xi_1)\,d\xi_1\right)d\xi\right]\exp\left(\int\limits_0^x \sigma_0(\xi)\,d\xi\right).$$

Отсюда находим

$$\alpha(x) = u(x, x+0) =$$
$$= \left\{\left[\frac{1}{A^2} + \int\limits_0^x \sigma_1(\xi)\exp\left(-\int\limits_0^\xi \sigma_0(\xi_1)\,d\xi_1\right)d\xi\right]\exp\left(\int\limits_0^x \sigma_0(\xi)\,d\xi\right)\right\}^{-1/2}. \quad (5)$$

В силу сделанного выше предположения о положительности $\sigma_1(x)$, функция $\alpha(x)$ определена при всех $x \in [0, T/2]$.

Введем функции

$$\begin{gathered} v(x,t) = u_t(x,t) + u_x(x,t), \quad w(x,t) = u_t(x,t) - u_x(x,t), \\ \varphi(x,t) = u_t(x,t) = \frac{v(x,t) + w(x,t)}{2}. \end{gathered} \quad (6)$$

Тогда в области G_T выполняются соотношения

$$\begin{gathered} v_t - v_x + \sigma(x, u^2)\varphi = 0, \quad v|_{t=x} = \alpha'(x); \\ w_t + w_x + \sigma(x, u^2)\varphi = 0. \end{gathered} \quad (7)$$

Интегрируя первое уравнение (7) на плоскости переменных ξ, τ вдоль отрезка прямой линии $\tau + \xi = t + x$ от точки (x,t) до точки $((x+t)/2, (x+t)/2)$ и учитывая граничное условие при $\tau = \xi$, находим уравнение для функции $v(x,t)$:

$$v(x,t) = \alpha'((x+t)/2) - \int\limits_{(x+t)/2}^{t} \sigma\big(\xi, u^2(\xi,\tau)\big)\varphi(\xi,\tau)|_{\xi = t+x-\tau}\,d\tau,$$
$$(x,t) \in G_T. \quad (8)$$

Аналогично, интегрируя второе уравнение (7) вдоль отрезка прямой линии $\tau - \xi = t - x$ от точки $(0, t-x)$ до точки (x,t), находим уравнение для функции $w(x,t)$:

$$w(x,t) = w(0,t-x) - \int\limits_{t-x}^{t} \sigma\big(\xi, u^2(\xi,\tau)\big)\varphi(\xi,\tau)|_{\xi=x-t+\tau}\, d\tau. (x,t) \in G_T. \quad (9)$$

Так как $u_t(0,t) = 0$, то из (6) следует, что $w(0,t) = -v(0,t)$. Используя это равенство и (8), найдём

$$w(0,t-x) = -v(0,t-x) =$$
$$= -\alpha'((t-x)/2) + \int\limits_{(t-x)/2}^{t-x} \sigma\big(\xi, u^2(\xi,\tau)\big)\varphi(\xi,\tau)|_{\xi=t-x-\tau}\, d\tau, \quad t \in [0, T/2].$$

Тогда уравнение (9) можно записать в виде:

$$w(x,t) = -\alpha'((t-x)/2) + \int\limits_{(t-x)/2}^{t-x} \sigma\big(\xi, u^2(\xi,\tau)\big)\varphi(\xi,\tau)|_{\xi=t-x-\tau}\, d\tau -$$
$$- \int\limits_{t-x}^{t} \sigma\big(\xi, u^2(\xi,\tau)\big)\varphi(\xi,\tau)|_{\xi=x-t+\tau}\, d\tau, (x,t) \in G_T. \quad (10)$$

Складывая уравнения (8) и (10) и деля результат на 2, получаем уравнение для функции $\varphi(x,t)$:

$$\varphi(x,t) = \frac{\alpha'((x+t)/2) - \alpha'((t-x)/2)}{2} +$$
$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{(t-x)/2}^{t-x} \sigma\big(\xi, u^2(\xi,\tau)\big)\varphi(\xi,\tau)|_{\xi=t-x-\tau}\, d\tau -$$
$$- \frac{1}{2} \int\limits_{t-x}^{t} \sigma\big(\xi, u^2(\xi,\tau)\big)\varphi(\xi,\tau)|_{\xi=x-t+\tau}\, d\tau -$$
$$- \frac{1}{2} \int\limits_{(x+t)/2}^{t} \sigma\big(\xi, u^2(\xi,\tau)\big)\varphi(\xi,\tau)|_{\xi=t+x-\tau}\, d\tau, \quad (x,t) \in G_T. \quad (11)$$

Добавим к уравнению (11) уравнение для функции $u(x,t)$. Оно имеет вид

$$u(x,t) = \alpha(x) + \int_x^t \varphi(x,\tau)\,d\tau, \quad (x,t) \in G_T. \tag{12}$$

Уравнения (11) и (12) образуют замкнутую систему уравнений для определения функций $\varphi(x,t)$ и $u(x,t)$ в области G_T. Заметим, что в уравнении (12) $\sigma(x,u^2) = \sigma_0(x) + \sigma_1(x)u^2(x,t)$.

Для системы (11), (12) имеет место следующая

Лемма 1 (Априорная оценка решения). *Пусть функции* $\sigma_0(x)$ *и* $\sigma_1(x)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

$$\begin{gathered} \sigma_0 \in C([0,T/2], \quad \sigma_1 \in C([0,T/2], \\ 0 < \sigma_0(x) \leqslant \eta, \quad 0 < \sigma_1(x) \leqslant \eta, \quad x \in [0,T/2], \end{gathered} \tag{13}$$

в которых η *— некоторое положительное число. Пусть, кроме того, выполнено условие*

$$0 < A \leqslant \frac{2}{3e^{2\eta T} - 1}. \tag{14}$$

Тогда, если в области G_T *существует непрерывное решение уравнений* (5), (6), *то для него выполняются оценки*

$$\begin{gathered} |u(x,t)| \leqslant 1, \\ |u_t(x,t)| = |\varphi(x,t)| \leqslant 3A\eta e^{2\eta t} \leqslant 3A\eta e^{2\eta T} =: A_0, \quad (x,t) \in G_T. \end{gathered} \tag{15}$$

Доказательство. Из формулы (5) и условий (13) следует неравенств $0 < \alpha(x) \leqslant A$, а из уравнения (4) находим, что

$$|\alpha'(x)| \leqslant \eta(1 + A^2)A/2 =: B.$$

Введём множества

$$\Sigma(t) = \{x|\, x \in [0, T/2 - |t - T/2|]\} \quad t \in [0,T]$$

и обозначим

$$\varphi_*(t) := \max_{x \in \Sigma(t)} |\varphi(x,t)|.$$

Из уравнений (11), (12) следуют неравенства

$$|u(x,t)| \leqslant A + \int_0^t \varphi_*(\tau)\,d\tau =: J(t),$$

$$\varphi_*(t) \leqslant B + \eta \int\limits_0^t \bigl(1 + J^2(\tau)\bigr)\varphi_*(\tau)\, d\tau \leqslant B + \eta J(t) + \eta J^3(t).$$

В силу условия (14), $A < 1$. Тогда $B \leqslant \eta A$. Предположим, что $J(T) \leqslant 1$ (в дальнейшем мы покажем, что это предположение выполнено, если выполнено (14)). При этом $J^3(t) \leqslant J(t)$ для всех $t \in [0, T]$. Предыдущее неравенство для $\varphi_*(t)$ можно тогда записать в виде

$$\varphi_*(t) \leqslant \eta A + 2\eta J(t), \quad t \in [0, T].$$

Отсюда получаем, что

$$J'(t) = \varphi_*(t) \leqslant \eta A + 2\eta J(t), \quad t \in [0, T]; \quad J(0) = A.$$

Из этого неравенства следует, что

$$J(t) \leqslant \frac{A}{2}\left(3e^{2\eta t} - 1\right), \quad t \in [0, T].$$

Сделанное выше предположение, что $J(T) \leqslant 1$ приводит к условию

$$A \leqslant \frac{2}{3e^{2\eta T} - 1},$$

которое совпадает с условием (14). Следовательно, сделанное выше предположение $J(T) \leqslant 1$ верно. Тогда для $\varphi_*(t)$ имеет место оценка

$$\varphi_*(t) \leqslant 3A\eta e^{2\eta t}, \quad t \in [0, T], \tag{16}$$

из которой вытекает вторая оценка (15). Первая оценка (15) является следствием неравенства $|u(x, t)| \leqslant J(T) \leqslant 1$. $\square$

Теорема 1 (единственности и существования решения). *Пусть функции $\sigma_0(x)$ и $\sigma_1(x)$ и число A удовлетворяют условиям леммы 1. Тогда в области G_T существует единственное непрерывно-дифференцируемое решение прямой задачи.*

Доказательство. Рассмотрим для системы уравнений (12) и (13) последовательные приближения

$$\varphi_0(x, t) = \frac{\alpha'((x + t)/2) - \alpha'((t - x)/2)}{2}, \quad (x, t) \in G_T,$$

$$\varphi_n(x,t)=\varphi_0(x,t)+\frac{1}{2}\int\limits_{(t-x)/2}^{t-x}\sigma\big(\xi,u_{n-1}^2(\xi,\tau)\big)\varphi_{n-1}(\xi,\tau)|_{\xi=t-x-\tau}\,d\tau-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t}\sigma\big(\xi,u_{n-1}^2(\xi,\tau)\big)\varphi_{n-1}(\xi,\tau)|_{\xi=x-t+\tau}\,d\tau-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{(x+t)/2}^{t}\sigma\big(\xi,u_{n-1}^2(\xi,\tau)\big)\varphi_{n-1}(\xi,\tau)|_{\xi=t+x-\tau}\,d\tau,\quad (x,t)\in G_T. \tag{17}$$

$$u_n(x,t)=\alpha(x)+\int\limits_x^t\varphi_n(x,\tau)\,d\tau,\quad (x,t)\in G_T. \tag{18}$$

Докажем, что все функции $u_n(x,t)$, $\varphi_n(x,t)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered}|u_n(x,t)\leqslant 1,\quad n=0,1,2,\dots,\quad (x,t)\in G_T,\\ |\varphi_n(x,t)\leqslant 3A\eta e^{2\eta t}\leqslant A_0,\quad n=0,1,2,\dots,\quad (x,t)\in G_T,\end{gathered} \tag{19}$$

аналогичным оценкам (15).

При $n=0$ второе неравенство (19) очевидно:

$$|\varphi_0(x,t)|\leqslant\eta A<3A\eta e^{2\eta t}\leqslant A_0,\quad (x,t)\in G_T. \tag{20}$$

Используя его и неравенство (14), для функции $u_0(x,t)$ получаем оценку

$$|u_0(x,t)|\leqslant A+\int\limits_0^t|\varphi_0(x,\tau)|\,d\tau\leqslant A+3A\eta\int\limits_0^t e^{2\eta\tau}\,d\tau=$$
$$=A+\frac{3A}{2}\big[e^{2\eta t}-1\big]=\frac{A}{2}\big[3e^{2\eta T}-1\big]\leqslant 1,\quad (x,t)\in G_T. \tag{21}$$

Оценим функцию $\varphi_1(x,t)$. Из формулы (17), используя неравенства (20) и (21), находим

$$|\varphi_1(x,t)|\leqslant A\eta+2\eta\int\limits_0^t\max_{\xi\in\Sigma(t)}|\varphi_0(\xi,\tau)|\,d\tau\leqslant$$
$$\leqslant A\eta+6A\eta^2\int\limits_0^t e^{2\eta\tau}\,d\tau=A\eta+3A\eta\big[e^{2\eta t}-1\big]=$$
$$=A\eta\big[3e^{2\eta t}-2\big]\leqslant 3A\eta e^{2\eta t}\leqslant A_0,\quad (x,t)\in G_T.$$

Оценка функции $u_1(x,t)$ выполняется в точности также, как в формуле (21) функции $u_0(x,t)$.

Используя для последующих приближений подобные вычисления, убеждаемся в справедливости неравенств (19) при любом n.

Докажем сходимость последовательных приближений. Введём разности

$$\overline{u}_n = u_{n+1} - u_n, \quad \overline{\varphi}_n = \varphi_{n+1} - \varphi_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Используя уравнения (17), (18), находим соотношения

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_0(x,t) = \frac{1}{2} \int\limits_{(t-x)/2}^{t-x} \sigma\big(\xi, u_0^2(\xi,\tau)\big)\varphi_0(\xi,\tau)|_{\xi=t-x-\tau}\, d\tau - \\ - \frac{1}{2} \int\limits_{t-x}^{t} \sigma\big(\xi, u_0^2(\xi,\tau)\big)\varphi_0(\xi,\tau)|_{\xi=x-t+\tau}\, d\tau - \\ - \frac{1}{2} \int\limits_{(x+t)/2}^{t} \sigma\big(\xi, u_0^2(\xi,\tau)\big)\varphi_0(\xi,\tau)|_{\xi=t+x-\tau}\, d\tau, \quad (x,t) \in G_T. \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overline{\varphi}_n(x,t) = \\ &= \frac{1}{2} \int\limits_{(t-x)/2}^{t-x} \Big[\sigma\big(\xi, u_n^2(\xi,\tau)\big)\varphi_n(\xi,\tau) - \sigma\big(\xi, u_{n-1}^2(\xi,\tau)\big)\varphi_{n-1}(\xi,\tau)\Big]\Big|_{\xi=t-x-\tau} d\tau \\ &- \frac{1}{2} \int\limits_{t-x}^{t} \Big[\sigma\big(\xi, u_n^2(\xi,\tau)\big)\varphi_n(\xi,\tau) - \sigma\big(\xi, u_{n-1}^2(\xi,\tau)\big)\varphi_{n-1}(\xi,\tau)\Big]\Big|_{\xi=x-t+\tau} d\tau \\ &- \frac{1}{2} \int\limits_{(x+t)/2}^{t} \Big[\sigma\big(\xi, u_n^2(\xi,\tau)\big)\varphi_n(\xi,\tau) - \sigma\big(\xi, u_{n-1}^2(\xi,\tau)\big)\varphi_{n-1}(\xi,\tau)\Big]\Big|_{\xi=t+x-\tau} d\tau, \\ &\qquad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (x,t) \in G_T. \quad (23) \end{aligned}$$

$$\overline{u}_n(x,t) = \int\limits_x^t \overline{\varphi}_n(x,\tau)\, d\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (x,t) \in G_T. \quad (24)$$

Из уравнений (22), (24) в силу (13) имеем

$$
\begin{gathered}
|\overline{\varphi}_0(x,t)| \leqslant \int\limits_0^t \max_{\xi\in\Sigma(t)} \sigma(\xi, u_0^2(\xi,\tau))|\varphi_0(\xi,\tau)|\,d\tau \leqslant 2\eta \int\limits_0^t A_0\,d\tau = 2\eta A_0 \frac{t}{1!},\\
|\overline{u}_0(x,t)| \leqslant \int\limits_0^t \max_{\xi\in\Sigma(t)} |\varphi_0(\xi,\tau)|\,d\tau \leqslant 2\eta A_0 T\frac{t}{1!}, \quad (x,t)\in G_T.
\end{gathered} \tag{25}
$$

Чтобы оценить $\overline{\varphi}_n(x,t)$ для $n=1,2,\ldots$, преобразуем равенство (23). Для этого запишем разность $\sigma(\xi,u_n^2(\xi,\tau))\varphi_n(\xi,\tau)-\sigma(\xi,u_{n-1}^2(\xi,\tau))\varphi_{n-1}(\xi,\tau)$ сначала в виде

$$
\begin{aligned}
&\sigma(\xi,u_n^2(\xi,\tau))\varphi_n(\xi,\tau)-\sigma(\xi,u_{n-1}^2(\xi,\tau))\varphi_{n-1}(\xi,\tau)=\\
&\quad=\big[\sigma(\xi,u_n^2(\xi,\tau))-\sigma(\xi,u_{n-1}^2(\xi,\tau))\big]\varphi_n(\xi,\tau)+\sigma(\xi,u_{n-1}^2(\xi,\tau))\overline{\varphi}_{n-1}(\xi,\tau),
\end{aligned}
$$

а затем, используя представление $\sigma(x,u)=\sigma_0(x)+\sigma_1(x)u^2$, запишем множитель, стоящий перед $\varphi_n(\xi,\tau)$, в виде

$$
\begin{aligned}
&\sigma(\xi,u_n^2(\xi,\tau))-\sigma(\xi,u_{n-1}^2(\xi,\tau))=\sigma_1(x)\big(u_n^2(\xi,\tau)-u_{n-1}^2(\xi,\tau)\big)=\\
&\qquad\qquad=\sigma_1(x)\big(u_n(\xi,\tau)-u_{n-1}(\xi,\tau)\big)\big(u_n(\xi,\tau)+u_{n-1}(\xi,\tau)\big).
\end{aligned}
$$

Так как

$$
|u_n(x,t)|\leqslant 1, \quad \sigma_1(\xi)\leqslant\eta, \quad \sigma(\xi,u)\leqslant 2\eta, \quad |\varphi_n(x,t)|\leqslant A_0,
$$

то

$$
\begin{aligned}
&|\sigma(\xi,u_n^2(\xi,\tau))\varphi_n(\xi,\tau)-\sigma(\xi,u_{n-1}^2(\xi,\tau))\varphi_{n-1}(\xi,\tau)|\leqslant\\
&\qquad\qquad\leqslant 2\eta A_0|\overline{u}_{n-1}(\xi,\tau)|+2\eta|\overline{\varphi}_{n-1}(\xi,\tau)|.
\end{aligned}
$$

Поэтому из равенств (23), (24) находим, что

$$
\begin{gathered}
|\overline{\varphi}_n(x,t)|\leqslant\int\limits_0^t\Big[2\eta A_0\max_{\xi\in\Sigma(t)}|\overline{u}_{n-1}(\xi,\tau)|+2\eta\max_{\xi\in\Sigma(t)}|\overline{\varphi}_{n-1}(\xi,\tau)|\Big]\,d\tau,\\
|\overline{u}_n(x,t)|\leqslant\int\limits_0^t\max_{\xi\in\Sigma(t)}|\overline{\varphi}_n(\xi,\tau)|\,d\tau, \quad n=1,2,\ldots, \quad (x,t)\in G_T.
\end{gathered} \tag{26}
$$

Используя (25), (26), оценим функции $\overline{\varphi}_1(x,t)$, $\overline{u}_1(x,t)$.

$$|\overline{\varphi}_1(x,t)| \leqslant \int\limits_0^t \left[2\eta A_0 \max_{\xi\in\Sigma(t)} |\overline{u}_0(\xi,\tau)| + 2\eta \max_{\xi\in\Sigma(t)} |\overline{\varphi}_0(\xi,\tau)|\right] d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t \left[2\eta A_0\Big(2\eta A_0 T\frac{\tau}{1!}\Big) + 2\eta\Big(2\eta A_0\frac{\tau}{1!}\Big)\right] d\tau =$$

$$= \underbrace{(2\eta)^2\big(A_0^2 T + A_0\big)}_{=:C}\frac{t^2}{2!} = C\frac{t^2}{2!}, \quad (x,t)\in G_T,$$

$$|\overline{u}_1(x,t)| \leqslant \int\limits_x^t \max_{\xi\in\Sigma(t)} |\overline{\varphi}_1(x,\tau)|\, d\tau \leqslant TC\frac{t^2}{2!}, \quad (x,t)\in G_T.$$

С помощью этих формул оценим последующие приближения. Проводя вычисления, получаем

$$|\overline{\varphi}_2(x,t)| \leqslant \int\limits_0^t \left[2A_0\eta \max_{\xi\in\Sigma(t)} |\overline{u}_1(\xi,\tau)| + 2\eta \max_{\xi\in\Sigma(t)} |\overline{\varphi}_1(\xi,\tau)|\right] d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t \left[2A_0\eta CT\frac{\tau^2}{2!} + 2\eta C\frac{\tau^2}{2!}\right] d\tau = C2\eta\big(A_0T+1\big)\frac{t^3}{3!},$$

$$|\overline{u}_2(x,t)| \leqslant \int\limits_x^t \max_{\xi\in\Sigma(t)} |\overline{\varphi}_2(x,\tau)|\, d\tau \leqslant TC2\eta\big(A_0T+1\big)\frac{t^3}{3!}, \quad (x,t)\in G_T.$$

$$|\overline{\varphi}_3(x,t)| \leqslant \int\limits_0^t \left[A_0\eta \max_{\xi\in\Sigma(t)} |\overline{u}_2(\xi,\tau)| + 2\eta \max_{\xi\in\Sigma(t)} |\overline{\varphi}_2(\xi,\tau)|\right] d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t \left[2A_0\eta TC2\eta\big(A_0T+1\big)\frac{t^3}{3!} + 2\eta C2\eta\big(A_0T+1\big)\frac{\tau^3}{3!}\right] d\tau =$$

$$= C(2\eta)^2\big(A_0T+1\big)^2\,\frac{t^4}{4!},$$

$$|\overline{u}_3(x,t)| \leqslant \int\limits_x^t \max_{\xi\in\Sigma(t)} |\overline{\varphi}_3(x,\tau)|\, d\tau \leqslant TC(2\eta)^2\big(A_0T+1\big)^2\frac{t^4}{4!}, \quad (x,t)\in G_T.$$

$$|\overline{\varphi}_4(x,t)| \leqslant \int\limits_0^t \big[2A_0\eta \max_{\xi\in\Sigma(t)} |\overline{u}_3(\xi,\tau)| + 2\eta \max_{\xi\in\Sigma(t)} |\overline{\varphi}_3(\xi,\tau)|\big]\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t \left[2A_0\eta T C(2\eta)^2\big(A_0T+1\big)^2\frac{\tau^4}{4!} + 2\eta C(2\eta)^2\big(A_0T+1\big)^2\frac{\tau^4}{4!}\right] d\tau =$$

$$= C(2\eta)^3\big(A_0T+1\big)^3\,\frac{t^5}{5!},$$

$$|\overline{u}_3(x,t)| \leqslant \int\limits_x^t \max_{\xi\in\Sigma(t)} |\overline{\varphi}_3(x,\tau)|\, d\tau \leqslant TC(2\eta)^3\big(A_0T+1\big)^3\,\frac{t^5}{5!}, \quad (x,t)\in G_T.$$

Методом математической индукции проверяются общие неравенства:

$$|\overline{\varphi}_n(x,t)| \leqslant C(2\eta)^{n-1}\big(A_0T+1\big)^{n-1}\,\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant$$

$$\leqslant C(2\eta)^{n-1}\big(A_0T+1\big)^{n-1}\,\frac{T^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$|\overline{u}_n(x,t)| \leqslant TC(2\eta)^{n-1}\big(A_0T+1\big)^{n-1}\,\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant$$

$$\leqslant TC(2\eta)^{n-1}\big(A_0T+1\big)^{n-1}\,\frac{T^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (x,t)\in G_T, \quad n=3,4,\ldots,$$

из которых следует равномерная сходимость в области G_T последовательностей $u_n(x,t)$, $\varphi_n(x,t)$. Так как эти последовательности непрерывны, то они сходятся к некоторым непрерывным функциям $u(x,t)$, $\varphi(x,t) = u_t(x,t)$. Из равенств (8), (10) вытекает непрерывность в G_T функций $v(x,t)$ и $w(x,t)$, следовательно, и функции $u_x(x,t)$. Таким образом, $u\in C^1(G_T)$.

Докажем единственность решения прямой задачи. Пусть существуют два непрерывно дифференцируемые решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, для каждого из которых выполнены неравенства (15). Обозначим

$$\widetilde{u}(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t),$$

$$\widetilde{\varphi}(x,t) = \varphi_1(x,t) - \varphi_2(x,t), \quad \varphi_1(x,t) := \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,t), \quad \varphi_2(x,t) := \frac{\partial u_2}{\partial t}(x,t).$$

Тогда разности $\widetilde{u}(x,t)$ и $\widetilde{\varphi}(x,t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\widetilde{u}(x,t) = \int\limits_x^t \widetilde{\varphi}(x,\tau)\, d\tau, \quad (x,t)\in G_T, \tag{27}$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{(t-x)/2}^{t-x} \big[\sigma(\xi,u_1^2(\xi,\tau))\varphi_1(\xi,\tau) - \sigma(\xi,u_2^2(\xi,\tau))\varphi_2(\xi,\tau)\big]_{\xi=t-x-\tau}\,d\tau - \\
- \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t} \big[\sigma(\xi,u_1^2(\xi,\tau))\varphi_1(\xi,\tau) - \sigma(\xi,u_2^2(\xi,\tau))\varphi_2(\xi,\tau)\big]_{\xi=x-t+\tau}\,d\tau - \\
- \frac{1}{2}\int\limits_{(x+t)/2}^{t} \big[\sigma(\xi,u_1^2(\xi,\tau))\varphi_1(\xi,\tau) - \sigma(\xi,u_2^2(\xi,\tau))\varphi_2(\xi,\tau)\big]_{\xi=t+x-\tau}\,d\tau, \\
(x,t)\in G_T. \quad (28)
\end{aligned}
$$

Запишем разность $\sigma(\xi,u_1^2(\xi,\tau))\varphi_1(\xi,\tau) - \sigma(\xi,u_2^2(\xi,\tau))\varphi_2(\xi,\tau)$ сначала в виде

$$
\begin{aligned}
&\sigma(\xi,u_1^2(\xi,\tau))\varphi_1(\xi,\tau) - \sigma(\xi,u_2^2(\xi,\tau))\varphi_2(\xi,\tau) \\
&\qquad = [\sigma(\xi,u_1^2(\xi,\tau)) - \sigma(\xi,u_2^2(\xi,\tau))]\varphi_1(\xi,\tau) + \sigma(\xi,u_2^2(\xi,\tau))\widetilde{\varphi}(\xi,\tau),
\end{aligned}
$$

а затем член $\sigma(\xi,u_1^2(\xi,\tau)) - \sigma(\xi,u_2^2(\xi,\tau))$ представим следующей формулой:

$$
\begin{aligned}
\sigma(\xi,u_1^2(\xi,\tau)) - \sigma(\xi,u_2^2(\xi,\tau)) = \sigma_1(\xi)\big(u_1^2(\xi,\tau) - u_2^2(\xi,\tau)\big) = \\
= \sigma_1(\xi)\widetilde{u}(\xi,\tau)\big(u_1(\xi,\tau) + u_2(\xi,\tau)\big).
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
|\sigma(u_1(\xi,\tau))\varphi_1(\xi,\tau) - \sigma(u_2(\xi,\tau))\varphi_2(\xi,\tau)| \leqslant |\widetilde{u}(\xi,\tau)|2A_0\eta + |\widetilde{\varphi}(\xi,\tau)|2\eta.
$$

Из равенства (28) находим, что

$$
\begin{aligned}
|\widetilde{\varphi}(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{(t-x)/2}^{t-x} \big(|\widetilde{u}(\xi,\tau)|2A_0\eta + |\widetilde{\varphi}(\xi,\tau)|2\eta\big)_{\xi=t-x-\tau}\,d\tau + \\
+ \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t} \big(|\widetilde{u}(\xi,\tau)|2A_0\eta + |\widetilde{\varphi}(\xi,\tau)|2\eta\big)_{\xi=x-t+\tau}\,d\tau + \\
+ \frac{1}{2}\int\limits_{(x+t)/2}^{t} \big(|\widetilde{u}(\xi,\tau)|2A_0\eta + |\widetilde{\varphi}(\xi,\tau)|2\eta\big)_{\xi=t+x-\tau}\,d\tau, \quad (x,t)\in G_T. \quad (29)
\end{aligned}
$$

Обозначим

$$z(t) = \max\left\{ \max_{x\in\Sigma(t)} |\widetilde{u}(x,t)|, \max_{x\in\Sigma(t)} |\widetilde{\varphi}(x,t)| \right\},$$

где $\Sigma(t)$ — сечение области G_T плоскостью $t = \text{const}$. Тогда из формулы (27) следует неравенство

$$|\widetilde{u}(x,t)| \leqslant \int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau, \quad (x,t) \in G_T, \tag{30}$$

а из неравенства (29) оценка

$$|\widetilde{\varphi}(x,t)| \leqslant 2\eta(A_0+1) \int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau, \quad (x,t) \in G_T. \tag{31}$$

Результатом неравенств (30) и (31) является итоговое неравенство

$$z(t) \leqslant \varkappa \int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau, \quad t \in [0,T], \tag{32}$$

в котором постоянная $\varkappa$ определяется равенством $\varkappa = \max\{1, 2\eta(A_0+1)\}$. Из неравенства (32) следует, что $z(t) \equiv 0$ для $t \in [0,T]$, отсюда следует равенство $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ в G_T. Теорема 1 доказана.

Теперь выпишем уравнение для функции $u_x(x,t)$. Оно пригодится нам при исследовании обратной задачи. Так как $u_x(x,t) = [v(x,t) - w(x,t)]/2$, то уравнение для $u_x(x,t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} u_x(x,t) = \frac{\alpha'((x+t)/2) + \alpha'((t-x)/2)}{2} - \\ - \frac{1}{2} \int\limits_{(x+t)/2}^{t} \sigma\big(\xi, u^2(\xi,\tau)\big)\varphi(\xi,\tau)|_{\xi=t+x-\tau}\,d\tau - \\ - \frac{1}{2} \int\limits_{(t-x)/2}^{t-x} \sigma\big(\xi, u^2(\xi,\tau)\big)\varphi(\xi,\tau)|_{\xi=t-x-\tau}\,d\tau + \\ + \frac{1}{2} \int\limits_{t-x}^{t} \sigma\big(\xi, u^2(\xi,\tau)\big)\varphi(\xi,\tau)|_{\xi=x-t+\tau}\,d\tau, (x,t) \in G_T. \end{aligned} \tag{33}$$

В силу (2) из уравнения (33) при $x = 0$ получим

$$f(t) = \alpha'(t/2) - \int\limits_0^{t/2} \big[\sigma_0(\xi) + \sigma_1(\xi)u^2(\xi, t-\xi)\big)\big]\varphi(\xi, t-\xi)\, d\xi, \qquad (34)$$

В равенстве (34) сделаем замену переменных $x = t/2$, в результате получим

$$f(2x) = \alpha'(x) - \int\limits_0^{x} \sigma\big(\xi, u^2(\xi,\tau)\big)\varphi(\xi,\tau)|_{\tau=2x-\xi}\, d\xi, \qquad (35)$$

В силу (4) из уравнения (35) при $x = 0$ получим

$$f(0) = \alpha'(0) = -\frac{[\sigma_0(0) + \sigma_1(0)A^2]A}{2}, \qquad (36)$$

заметим, что в силу леммы 1 имеет место неравенство $f(0) < 0$.

§ 3. Исследование обратной задачи

Примем, что в формуле (2) выполняются условия

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad A_2^2 - A_1^2 \geqslant \delta > 0.$$

Определение. Будем говорить, что функции $f_m(t) \in \mathcal{F}$, $m = 1, 2$, если они удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} f_m \in C[0,T], \quad f_m(0) < 0, \\ A_2^3 f_1(t) - A_1^3 f_2(t) < 0, \ A_2 f_1(t) - A_1 f_2(t) > 0, \quad t \in [0,T]. \end{gathered} \qquad (37)$$

Замечание. Два последних условия в (37) при $t = 0$ являются следствиями предположения в прямой задаче о положительности функций σ_0 и σ_1, а также условий

$$2f_m(0) + A_m\sigma_0(0) + A_m^3\sigma_1(0) = 0, \quad m = 1, 2,$$

вытекающими из равенства (35) при $x = 0$ и $A = A_m$, $f = f_m$, $m = 1, 2$.

В силу непрерывности функций $f_m(t)$ условия в (37) выполняются также для достаточно малых значений $t > 0$. То, что эти неравенства остаются верными для всех $t \in [0,T]$ является условием на функции $f_1(t), f_2(t)$, гарантирующим положительность $\sigma_0(x)$ и $\sigma_1(x)$ на отрезке $[0, T_0/2]$.

Теорема 2. *Пусть задана информация (2) и функции $f_m(t) \in \mathcal{F}$, $m = 1, 2$. Тогда существует положительное число T_0 и единственный набор положительных функций $\sigma_0 \in C[0, T_0/2]$ и $\sigma_1 \in C[0, T_0/2]$, такой, что обобщённые решения $u_m \in C^1(G_{T_0})$ задачи (1) при $A = A_m$, $m = 1, 2$, удовлетворяют условию (2) для $t \leqslant T_0$.*

Доказательство теоремы 2. Применим формулу Даламбера к задаче

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} = -\sigma(x, u_m^2)\frac{\partial u_m}{\partial t}, \quad x > 0, \quad t \in (0, T], \\ u_m|_{x=0} = A_m, \quad \left.\frac{\partial u_m}{\partial x}\right|_{x=0} = f_m(t), \quad t \in [0, T], \quad m = 1, 2.\end{gathered} \tag{38}$$

Решение задачи (38) имеет вид

$$u_m(x, t) = u_m^0(x, t) - \frac{1}{2}\iint\limits_{D(x,t)} \left[\sigma(\xi, u_m^2(\xi, \tau))\frac{\partial u_m}{\partial t}(\xi, \tau)\right] d\tau d\xi, \tag{39}$$

где

$$u_m^0(x, t) = A_m + \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} f_m(\tau)\, d\tau, \quad m = 1, 2, \tag{40}$$

$D(x, t) = \{(\xi, \tau) \mid 0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant T/2,\ t - x + \xi \leqslant \tau \leqslant x + t - \xi\}$.

Запишем уравнение (39) следующим образом:

$$u_m(x, t) = u_m^0(x, t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} \sigma(\xi, u_m^2(\xi, \tau))\varphi_m(\xi, \tau)\, d\tau,$$
$$(x, t) \in G_T, \quad m = 1, 2, \tag{41}$$

и продифференцируем (41) по переменной t. Тогда получим уравнения

$$\begin{gathered}\varphi_m(x, t) = \varphi_m^0(x, t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^x \big[\sigma(\xi, u_m^2(\xi, t + x - \xi))\varphi_m(\xi, t + x - \xi) - \\ - \sigma(\xi, u_m^2(\xi, t - x + \xi))\varphi_m(\xi, t - x + \xi)\big]\, d\xi, \quad (x, t) \in G_T, \quad m = 1, 2,\end{gathered} \tag{42}$$

в которых

$$\varphi_m^0(x, t) = \frac{1}{2}[f_m(x + t) - f_m(t - x)], \quad m = 1, 2. \tag{43}$$

Аналогично равенству (35) можем написать соотношения для функций $f_m(2x)$:

$$f_m(2x) = \alpha'_m(x) - \int\limits_0^x \sigma(\xi, u_m^2(\xi, 2x-\xi))\varphi_m(\xi, 2x-\xi)\, d\xi, \quad m = 1, 2. \quad (44)$$

В равенствах (44) исключим $\alpha'_m(x)$ с помощью формулы (4), в результате получим

$$f_m(2x) = -\frac{\big[\sigma_0(x) + \sigma_1(x)\alpha_m^2(x)\big]\alpha_m(x)}{2} - \\ - \int\limits_0^x \sigma(\xi, u_m^2(\xi, 2x-\xi))\varphi_m(\xi, 2x-\xi)\, d\xi, \quad m = 1, 2. \quad (45)$$

Уравнения (45) запишем следующим образом:

$$\sigma_0(x)A_m(x) + \sigma_1(x)A_m^3(x) = \\ = -\sigma_0(x)\big(\alpha_m(x) - A_m\big) - \sigma_1(x)\big(\alpha_m^3(x) - A_m^3\big) - 2f_m(2x) - \\ - 2\int\limits_0^x \sigma(\xi, u_m^2(\xi, 2x-\xi))\varphi_m(\xi, 2x-\xi)\, d\xi, \quad m = 1, 2. \quad (46)$$

Из (46) находим уравнения

$$\sigma_0(x) = \sigma_0^0(x) - \\ - \frac{1}{A_1A_2(A_2^2 - A_1^2)}\Bigg\{A_2^3\Big[\sigma_0(x)\big(\alpha_1(x) - A_1\big) + \sigma_1(x)\big(\alpha_1^3(x) - A_1^3\big)\Big] + \\ + A_1^3\Big[\sigma_0(x)\big(\alpha_2(x) - A_2\big) + \sigma_1(x)\big(\alpha_2^3(x) - A_2^3\big)\Big] \\ + 2\int\limits_0^x \Big[A_2^3\sigma(\xi, u_1^2(\xi, 2x-\xi))\varphi_1(\xi, 2x-\xi) - \\ - A_1^3\sigma(\xi, u_2^2(\xi, 2x-\xi))\varphi_2(\xi, 2x-\xi)\Big]\, d\xi\Bigg\}. \quad (47)$$

$$\sigma_1(x) = \sigma_1^0(x) +$$

$$+\frac{1}{A_1A_2(A_2^2-A_1^2)}\Bigg\{A_2\Big[\sigma_0(x)\big(\alpha_1(x)-A_1\big)+\sigma_1(x)\big(\alpha_1^3(x)-A_1^3\big)\Big]-$$
$$-A_1\Big[\sigma_0(x)\big(\alpha_2(x)-A_2\big)-\sigma_1(x)\big(\alpha_2^3(x)-A_2^3\big)\Big]+$$
$$+2\int\limits_0^x\Big[A_2\sigma(\xi,u_1^2(\xi,2x-\xi))\varphi_1(\xi,2x-\xi)-$$
$$-A_1\sigma(\xi,u_2^2(\xi,2x-\xi))\varphi_2(\xi,2x-\xi)\,d\xi\Big]\,d\xi\Bigg\}. \qquad (48)$$

в которых

$$\sigma_0^0(x)=\frac{-2\big(A_2^3f_1(2x)-A_1^3f_2(2x)\big)}{A_1A_2(A_2^2-A_1^2)},\quad x\in[0,T/2], \qquad (49)$$

$$\sigma_1^0(x)=\frac{2\big(A_2f_1(2x)-A_1f_2(2x)\big)}{A_1A_2(A_2^2-A_1^2)},\quad x\in[0,T/2]. \qquad (50)$$

Заметим, что в силу (37), (49), (50) справедливы оценки

$$\sigma_0^0(x)>0,\quad \sigma_1^0(x)>0,\quad x\in[0,T/2].$$

Поэтому

$$\sigma_0^0(x)\geq 2\mu,\quad \sigma_1^0(x)\geq 2\mu,\quad x\in[0,T/2]. \qquad (51)$$

где

$$2\mu=\min\left\{\min_{x\in[0,T/2]}\sigma_0^0(x),\ \min_{x\in[0,T/2]}\sigma_1^0(x)\right\}>0.$$

Уравнения (47), (48) и (41), (42) при $m=1,2$, образуют замкнутую систему нелинейных интегральных уравнений для решения обратной задачи.

Определим вектор-функции

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(x,t)&=\big(\sigma_0(x),\sigma_1(x),u_1(x,t),u_2(x,t),\varphi_1(x,t),\varphi_2(x,t)\big),\\ \mathbf{g}^0(x,t)&=\big(\sigma_0^0(x),\sigma_1^0(x),u_1^0(x,t),u_2^0(x,t),\varphi_1^0(x,t),\varphi_2^0(x,t)\big).\end{aligned} \qquad (52)$$

Пусть $\mathbf{C}(G_T)$ — пространство векторных функций $\mathbf{g}(x,t)$, в котором норма определяется как максимум норм компонент, и в нём шар

$$\|\mathbf{g}-\mathbf{g}^0\|_{\mathbf{C}(G_T)}\leqslant\|\mathbf{g}^0\|_{\mathbf{C}(G_T)}. \qquad (53)$$

Рассмотрим на этом множестве равенство

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{g}) = \mathbf{g}, \tag{54}$$

в котором компоненты оператора $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_6)$ определены формулами

$$\begin{aligned}
\Lambda_1\mathbf{g}(x,t) = \sigma_0^0(x) - {} \\
&- \frac{1}{A_1A_2(A_2^2 - A_1^2)}\bigg\{A_2^3\Big[\sigma_0(x)\big(\alpha_1(x) - A_1\big) + \sigma_1(x)\big(\alpha_1^3(x) - A_1^3\big)\Big] + \\
&+ A_1^3\Big[\sigma_0(x)\big(\alpha_2(x) - A_2\big) + \sigma_1(x)\big(\alpha_2^3(x) - A_2^3\big)\Big] + \\
&+ 2\int_0^x \Big[A_2^3\sigma(\xi, u_1^2(\xi, 2x-\xi))\varphi_1(\xi, 2x-\xi) - \\
&- A_1^3\sigma(\xi, u_2^2(\xi, 2x-\xi))\varphi_2(\xi, 2x-\xi)\Big]\,d\xi\bigg\}.
\end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_2\mathbf{g}(x,t) = \sigma_1^0(x) + {} \\
&+ \frac{1}{A_1A_2(A_2^2 - A_1^2)}\bigg\{A_2\Big[\sigma_0(x)\big(\alpha_1(x) - A_1\big) + \sigma_1(x)\big(\alpha_1^3(x) - A_1^3\big)\Big] - \\
&- A_1\Big[\sigma_0(x)\big(\alpha_2(x) - A_2\big) - \sigma_1(x)\big(\alpha_2^3(x) - A_2^3\big)\Big] + \\
&+ 2\int_0^x \Big[A_2\sigma(\xi, u_1^2(\xi, 2x-\xi))\varphi_1(\xi, 2x-\xi) - \\
&- A_1\sigma(\xi, u_2^2(\xi, 2x-\xi))\varphi_2(\xi, 2x-\xi)\,d\xi\Big]\,d\xi\bigg\}.
\end{aligned} \tag{56}$$

$$\Lambda_{2+m}\mathbf{g}(x,t) = u_m^0(x,t) - \frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} \sigma(\xi, u_m^2(\xi,\tau))\varphi_m(\xi,\tau)\,d\tau,$$
$$(x,t) \in G_T, \quad m = 1, 2, \tag{57}$$

$$\Lambda_{4+m}\mathbf{g}(x,t) = \varphi_m^0(x,t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^x \big[\sigma(\xi, u_m^2(\xi, t+x-\xi))\varphi_m(\xi, t+x-\xi) -$$
$$- \sigma(\xi, u_m^2(\xi, t-x+\xi))\varphi_m(\xi, t-x+\xi)\big]\, d\xi, \quad (x,t)\in G_T, \quad m=1,2. \quad (58)$$

Обозначим $\mathbf{C}(G_T)$ — прямое произведение шести экземпляров пространств $C(G_T)$, которое является банаховым пространством непрерывных вектор-функций с нормой

$$\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{C}(G_T)} = \max_{1\leqslant k\leqslant 10} \|g_k\|_{C(G_T)}. \quad (59)$$

Так как $\mathbf{g}^0 \in \mathbf{C}(G_T)$, то все вектор-функции, определённые в (52) являются элементами $\mathbf{C}(G_T)$. Рассмотрим в $\mathbf{C}(G_T)$ замкнутое множество

$$\mathbf{R}_T := \Big\{\mathbf{g}\in \mathbf{C}(G_T) \mid \big\|\mathbf{g}-\mathbf{g}^0\big\|_{\mathbf{C}(G_T)} \leqslant \big\|\mathbf{g}^0\big\|_{\mathbf{C}(G_T)}\Big\}. \quad (60)$$

На этом множестве справедливы оценки

$$\|g_k\|_{C(G_T)} \leqslant \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{C}(G_T)} \leqslant 2\|\mathbf{g}^0\|_{\mathbf{C}(G_T)}, \quad k=\overline{1,6}. \quad (61)$$

В дальнейшем для сокращения записи будем использовать обозначение $\|\mathbf{g}\|$ вместо $\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{C}(G_T)}$.

Положим

$$0 < A_* \leqslant A_m \leqslant A_{**}, \quad m=1,2, \quad |A_2^2 - A_1^2| \geqslant \delta > 0. \quad (62)$$

Оценим разности $\alpha_m(x) - A_m$ и $\alpha_m^3(x) - A_m^3$. Так как $\alpha_m'(x) < 0$, то

$$0 < \alpha_m(x) \leqslant \alpha_m(0) = A_m.$$

Тогда

$$|\alpha_m(x) - A_m| \leqslant \int\limits_0^x |\alpha_m'(\xi)|\, d\xi \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^x (|\sigma_0(\xi)| + |\sigma_1(\xi)|\alpha_m^2(\xi))\alpha_m(\xi)\, d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}T\|\mathbf{g}^0\|(1+A_m^2)A_m \leqslant \frac{1}{2}T\|\mathbf{g}^0\|(1+A_{**}^2)A_{**} = \varkappa_0 T\|\mathbf{g}^0\|,$$
$$m=1,2, \quad x\in[0,T/2], \quad (63)$$

где $\varkappa_0 := \dfrac{(1+A_{**}^2)A_{**}}{2}$. Далее,

$$|\alpha_m^3(x) - A_m^3| = |\alpha_m(x) - A_m|(\alpha_m^2(x) + A_m\alpha_m(x) + A_m^2) \leqslant \\ \leqslant \frac{3}{2}T\|\mathbf{g}^0\|(1 + A_{**}^2)A_{**}^3 = \varkappa_1 T\|\mathbf{g}^0\|, \quad m = 1,2, \quad x \in [0, T/2], \quad (64)$$

где $\varkappa_1 := \dfrac{3(1 + A_{**}^2)A_{**}^3}{2}$.

Функции $\sigma\big(x, u_m^2(x,t)\big)$, $m = 1,2$, допускают оценку

$$|\sigma\big(x, u_m^2(x,t)\big)| = |\sigma_0(x) + \sigma_1(x)u_m^2(x,t)\big)| \leqslant \big(2\|\mathbf{g}_0\| + 8\|\mathbf{g}_0\|^3\big) =: \nu_0\|\mathbf{g}_0\|, \\ m = 1,2, \quad (x,t) \in G_T, \quad (65)$$

в которой $\nu_0 = \nu_0(\|\mathbf{g}_0\|) = 2\big(1 + 4\|\mathbf{g}_0\|^2\big)$.

Оценим разности

$$\big|A_2^3\sigma(\xi, u_1^2(\xi, 2x-\xi))\varphi_1(\xi, 2x-\xi) - A_1^3\sigma(\xi, u_2^2(\xi, 2x-\xi))\varphi_2(\xi, 2x-\xi)\big| \leqslant \\ \leqslant \big|A_2^3\sigma(\xi, u_1^2(\xi, 2x-\xi))\varphi_1(\xi, 2x-\xi)| + |A_1^3\sigma(\xi, u_2^2(\xi, 2x-\xi))\varphi_2(\xi, 2x-\xi)\big| \leqslant \\ \leqslant 4A_{**}^3\nu_0\|\mathbf{g}_0\|^2 = \nu_1\|\mathbf{g}_0\|, \quad m = 1,2, \quad (x,t) \in G_T, \quad (66)$$

где $\nu_1 := \nu_1(\|\mathbf{g}_0\|) = 4A_{**}^3\nu_0\|\mathbf{g}_0\|$.

Используя (55)–(58) и формулы (63)–(66), оценим разности

$$\big|\Lambda_1\mathbf{g}(x,t) - \sigma_0^0(x)\big| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{A_1A_2(A_2^2 - A_1^2)}\Bigg\{A_2^3\Big[\sigma_0(x)\big|\alpha_1(x) - A_1\big| + \sigma_1(x)\big|\alpha_1^3(x) - A_1^3\big|\Big] + \\ + A_1^3\Big[\sigma_0(x)\big|\alpha_2(x) - A_2\big| + \sigma_1(x)\big|\alpha_2^3(x) - A_2^3\big|\Big] + \\ + 2\int_0^x \Big|A_2^3\sigma(\xi, u_1^2(\xi, 2x-\xi))|\varphi_1(\xi, 2x-\xi)| - \\ - A_1^3\sigma(\xi, u_2^2(\xi, 2x-\xi))|\varphi_2(\xi, 2x-\xi|)\Big|\,d\xi\Bigg\} \leqslant \\ \leqslant \frac{\|\mathbf{g}_0\|T}{A_*^2\delta}\big[4A_{**}^3\big(\varkappa_0 + \varkappa_1\big) + \nu_1\big] = \omega_1 T\|\mathbf{g}_0\|, \quad x \in [0, T/2], \quad (67)$$

где $\omega_1 := \dfrac{4A_{**}^3\big(\varkappa_0 + \varkappa_1\big) + \nu_1}{A_*^2\delta}$. Аналогично,

$$\big|\Lambda_2\mathbf{g}(x,t) - \sigma_1^0(x)\big| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{A_1A_2(A_2^2 - A_1^2)}\Bigg\{A_2\Big[\sigma_0(x)\big|\alpha_1(x) - A_1\big| + \sigma_1(x)\big|\alpha_1^3(x) - A_1^3\big|\Big] +$$

$$+ A_1\Big[\sigma_0(x)\big|\alpha_2(x) - A_2\big| + \sigma_1(x)\big|\alpha_2^3(x) - A_2^3\big|\Big] +$$

$$+ 2\int\limits_0^x \Big| A_2\sigma(\xi, u_1^2(\xi, 2x-\xi))\varphi_1(\xi, 2x-\xi) -$$

$$- A_1\sigma(\xi, u_2^2(\xi, 2x-\xi))\varphi_2(\xi, 2x-\xi)\,d\xi\Big|\,d\xi\Bigg\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|\mathbf{g}_0\|T}{A_*^2\delta}\big[4A_{**}\big(\varkappa_0 + \varkappa_1\big) + \nu_1\big] = \omega_2 T\|\mathbf{g}_0\|, \quad x \in [0, T/2]. \quad (68)$$

где $\omega_2 := \dfrac{4A_{**}\big(\varkappa_0 + \varkappa_1\big) + \nu_1}{A_*^2\delta}$.

Далее,

$$\big|\Lambda_{2+m}\mathbf{g}(x,t) - u_m^0(x,t)\big| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} \big|\sigma\big(\xi, u_m^2(\xi,\tau)\big)\varphi_m(\xi,\tau)\big|\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant T\|\mathbf{g}_0\|\omega_3, \quad (x,t) \in G_T, \quad m = 1,2, \quad (69)$$

где $\omega_3 := \nu_0$. Аналогично,

$$\big|\Lambda_{4+m}\mathbf{g}(x,t) - \varphi_m^0(x,t)\big| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^x \Big(\big|\sigma(\xi, u_m^2(\xi, t+x-\xi))\varphi_m(\xi, t+x-\xi)\big| +$$
$$+ \big|\sigma(\xi, u_m^2(\xi, t-x+\xi))\varphi_m(\xi, t-x+\xi)\big]\Big)\,d\xi \leqslant$$
$$\leqslant T\nu_0\|\mathbf{g}_0\| = T\|\mathbf{g}_0\|\omega_4, \quad (x,t) \in G_T, \quad m = 1,2. \quad (70)$$

где $\omega_4 := \nu_0$.

Выберем число T' так, чтобы выполнялись условия

$$T'\omega_k \leqslant 1, \quad k = \overline{1,4}, \quad (71)$$

Тогда оператор Λ отображает множество $\mathbf{R}_{T'}$ в себя.

Оценим снизу функции $\sigma_0(x)$ и $\sigma_1(x)$. Для этого воспользуемся формулами (47), (48), (51) и оценками (67), (68). В результате можем написать

$$\begin{aligned} &\sigma_0(x) \geqslant 2\sigma_0^0(x) - |\sigma_0(x) - \sigma_0^0(x)| \geqslant 2\mu - \omega_1 T\|\mathbf{g}_0\| \geqslant \mu > 0, \\ &\sigma_1(x) \geqslant 2\sigma_1^0(x) - |\sigma_1(x) - \sigma_1^0(x)| \geqslant 2\mu - \omega_2 T\|\mathbf{g}_0\| \geqslant \mu > 0, \end{aligned} \quad (72)$$

при $T\|\mathbf{g}_0\|\max\{\omega_1,\omega_2\}\leqslant\mu$. Отсюда следует, что коэффициенты $\sigma_0(x)$ и $\sigma_1(x)$ и положительны при $x\in[0,T_1/2]$, где

$$T_1\leqslant\frac{\mu}{\|\mathbf{g}_0\|\max\{\omega_1,\omega_2\}}.$$

Покажем, что оператор $\mathbf{\Lambda}$, определённый равенствами (57)–(60), является сжимающим при достаточно малом положительном $T\leqslant\min(T',T_1)$.

Пусть

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^1(x,t)&=\big(\sigma_0^1(x),\sigma_1^1(x),u_1^1(x,t),u_2^1(x,t),\varphi_1^1(x,t),\varphi_2^1(x,t)\big),\\ \mathbf{g}^2(x,t)&=\big(\sigma_0^2(x),\sigma_1^2(x),u_1^2(x,t),u_2^2(x,t),\varphi_1^2(x,t),\varphi_2^2(x,t)\big),\end{aligned}\tag{73}$$

Обозначим

$$\sigma^k(\xi,(u_m^k)^2(x,t)):=\big(\sigma_0^k(x)+\sigma_1^k(x)(u_m^k)^2(x,t)\big)\varphi_m^k(x,t),\quad k=1,2,\quad m=1,2.$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned}&\sigma^1(\xi,(u_m^1)^2(x,t))\varphi_m^1(x,t)-\sigma^2(\xi,(u_m^2)^2(x,t))\varphi_m^2(x,t)=\\ &\quad=\big(\sigma_0^1(x)-\sigma_0^2(x)\big)\varphi_m^1(x,t)+\sigma_0^2(x)\big(\varphi_m^1(x,t)-\varphi_m^2(x,t)\big)+\\ &\qquad+\big(\sigma_1^1(x)-\sigma_1^2(x)\big)(u_m^1)^2(x,t)\varphi_m^1(x,t)+\\ &\quad+\sigma_1^2(x)\big(u_m^1(x,t)-u_m^2(x,t)\big)\big(u_m^1(x,t)+u_m^2(x,t)\big)\varphi_m^1(x,t)+\\ &\quad+\sigma_1^2(x)(u_m^2)^2(x,t)\big(\varphi_m^1(x,t)-\varphi_m^2(x,t)\big),\quad(x,t)\in G_T,\quad m=1,2,\end{aligned}$$

и, воспользовавшись (61), напишем оценку

$$\begin{aligned}&\big|\sigma^1(\xi,(u_m^1)^2(x,t))\varphi_m^1(x,t)-\sigma^2(\xi,(u_m^2)^2(x,t))\varphi_m^2(x,t)\big|\leqslant\\ &\quad\leqslant\Big(2\|\mathbf{g}_0\|\big|\sigma_0^1(x)-\sigma_0^2(x)\big|+2\|\mathbf{g}_0\|\big|\varphi_m^1(x,t)-\varphi_m^2(x,t)\big|+\\ &\quad+8\|\mathbf{g}_0\|^3\big|\sigma_1^1(x)-\sigma_1^2(x)\big|+16\|\mathbf{g}_0\|^3\big|u_m^1(x,t)-u_m^2(x,t)\big|+\\ &+8\|\mathbf{g}_0\|^3\big|\varphi_m^1(x,t)-\varphi_m^2(x,t)\big|\Big)\leqslant4\|\mathbf{g}^1-\mathbf{g}^2\|\big(\|\mathbf{g}_0\|+8\|\mathbf{g}_0\|^3\big)=\nu_2\|\mathbf{g}^1-\mathbf{g}^2\|,\\ &\qquad(x,t)\in G_T,\quad m=1,2,\end{aligned}\tag{74}$$

где $\nu_2=4\big(\|\mathbf{g}_0\|+8\|\mathbf{g}_0\|^3\big)$.

Опираясь на равенства (55)–(58), (62)–(65), (74), оценим разности $\Lambda_k\mathbf{g}^1(x)-\Lambda_k\mathbf{g}^2(x)$, $k=\overline{1,6}$,

$$\big|\Lambda_1\mathbf{g}^1(x,t)-\Lambda_1\mathbf{g}^2(x,t)\big|\leqslant\frac{1}{A_1A_2(A_2^2-A_1^2)}\Big\{A_2^3\Big[\big(\sigma_0^1(x)-\sigma_0^2(x)\big)\big(\alpha_1(x)-A_1\big)+$$

$$+\big(\sigma_1^1(x)-\sigma_2^1(x)\big)\big(\alpha_1^3(x)-A_1^3\big)\Big]+$$

$$+A_1^3\Big[\big(\sigma_0^1(x)-\sigma_0^2(x)\big)\big(\alpha_2(x)-A_2\big)+\big(\sigma_1^1(x)-\sigma_1^2(x)\big)\big(\alpha_2^3(x)-A_2^3\big)\Big]+$$

$$+2\int\limits_0^x\Big[A_2^3\Big(\big|\sigma^1\big(\xi,\big(u_1^1\big)^2(\xi,2x-\xi)\big)-\sigma^2\big(\xi,\big(u_1^2\big)^2(\xi,2x-\xi)\big)\big|\big|\varphi_1^1(\xi,2x-\xi)\big|+$$

$$+\big|\sigma^2\big(\xi,\big(u_1^2\big)^2(\xi,2x-\xi)\big)\big|\big|\varphi_1^1(\xi,2x-\xi)-\varphi_1^2(\xi,2x-\xi)\big|\Big)+$$

$$+A_1^3\Big(\big|\sigma^1\big(\xi,\big(u_2^1\big)^2(\xi,2x-\xi)\big)-\sigma^2\big(\xi,\big(u_2^2\big)^2(\xi,2x-\xi)\big)\big|\big|\varphi_2^1(\xi,2x-\xi)\big|+$$

$$+\big|\sigma^2\big(\xi,\big(u_2^2\big)^2(\xi,2x-\xi)\big)\big|\big|\varphi_2^1(\xi,2x-\xi)-\varphi_2^2(\xi,2x-\xi)\big|\Big)\Big]\,d\xi\Big\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{T}{A_*^2\delta}\Big[2A_{**}^3(\varkappa_0+\varkappa_1)\|\mathbf{g}^0\|+2A_{**}^3\|\mathbf{g}^0\|\big(\nu_0+\nu_2\big)\Big]\|\mathbf{g}^1-\mathbf{g}^2\|=$$

$$=\gamma_1T\|\mathbf{g}^1-\mathbf{g}^2\|,\quad (x,t)\in G_T,\quad m=1,2,\quad (75)$$

где $\gamma_1=\dfrac{2A_{**}^3}{A_*^2\delta}\big[\varkappa_0+\varkappa_1+\nu_0+\nu_2\big]\|\mathbf{g}^0\|$. Аналогично,

$$\big|\Lambda_2\mathbf{g}^1(x,t)-\Lambda_2\mathbf{g}^2(x,t)\big|\leqslant\frac{1}{A_1A_2(A_2^2-A_1^2)}\times$$

$$\times\Big\{A_2\Big[\big|\sigma_0^1(x)-\sigma_0^2(x)\big|\big|\alpha_1(x)-A_1\big|+\big|\sigma_1^1(x)-\sigma_1^2(x)\big|\big|\alpha_1^3(x)-A_1^3\big|\Big]+$$

$$+A_1\Big[\big|\sigma_0^1(x)-\sigma_0^2(x)\big|\big|\alpha_2(x)-A_2\big|+\big|\sigma_1^1(x)-\sigma_1^2(x)\big|\big|\alpha_2^3(x)-A_2^3\big|\Big]+$$

$$+2\int\limits_0^x\Big[A_2\Big(\big|\sigma^1\big(\xi,\big(u_1^1\big)^2(\xi,2x-\xi)\big)-\sigma^2\big(\xi,\big(u_1^1\big)^2(\xi,2x-\xi)\big)\big|\big|\varphi_1^1(\xi,2x-\xi)\big|+$$

$$+\big|\sigma^2\big(\xi,\big(u_1^1\big)^2(\xi,2x-\xi)\big)\big|\big|\varphi_1^1(\xi,2x-\xi)-\varphi_1^2(\xi,2x-\xi)\big|\Big)+$$

$$+A_1\Big(\big|\sigma^1\big(\xi,\big(u_2^1\big)^2(\xi,2x-\xi)\big)-\sigma^2\big(\xi,\big(u_2^1\big)^2(\xi,2x-\xi)\big)\big|\big|\varphi_2^1(\xi,2x-\xi)\big|+$$

$$+\big|\sigma^2\big(\xi,\big(u_2^1\big)^2(\xi,2x-\xi)\big)\big|\big|\varphi_2^1(\xi,2x-\xi)-\varphi_2^2(\xi,2x-\xi)\big|\Big)\Big]\,d\xi\Big\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{T}{A_*^2\delta}\Big[2A_{**}(\varkappa_0+\varkappa_1)\|\mathbf{g}^0\|+2A_{**}(\nu_0\|\mathbf{g}^0\|+\nu_2\|\mathbf{g}^0\|)\Big]\|\mathbf{g}^1-\mathbf{g}^2\|=$$

$$= \gamma_2 T\|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|, \quad (x,t) \in G_T, \quad m = 1,2, \quad (76)$$

где $\gamma_2 = \dfrac{2A_{**}}{A_*^2\delta}\big[\varkappa_0 + \varkappa_1 + \nu_0 + \nu_2\big]\|\mathbf{g}^0\|$.

Далее,

$$\big|\Lambda_{2+m}\mathbf{g}^1(x,t) - \Lambda_{2+m}\mathbf{g}^2(x,t)\big| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} \Big[\big|\sigma^1\big(\xi, \big(u_m^1\big)^2(\xi,\tau)\big) - \sigma^2\big(\xi, \big(u_m^2\big)^2(\xi,\tau)\big)\big|\big|\varphi_m^1(\xi,\tau)\big| +$$
$$+ \big|\sigma^2\big(\xi, \big(u_m^2\big)^2(\xi,\tau)\big)\big|\big|\varphi_m^1(\xi,\tau) - \varphi_m^2(\xi,\tau)\big|\Big]\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \frac{T^2}{4}\big(2\nu_2\|\mathbf{g}^0\| + \nu_0\|\mathbf{g}^0\|\big)\|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\| = \gamma_3 T\|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|,$$
$$(x,t) \in G_T, \quad m = 1,2, \quad (77)$$

где $\gamma_3 := \gamma_3(T) = T(\nu_0 + 2\nu_2)\|\mathbf{g}^0\|/4$,

$$\big|\Lambda_{4+m}\mathbf{g}^1(x,t) - \Lambda_{4+m}\mathbf{g}^2(x,t)\big| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^x \Big[\big|\sigma^1\big(\xi, \big(u_m^1\big)^2(\xi,t+x-\xi)\big) - \sigma^2\big(\xi, \big(u_m^2\big)^2(\xi,t+x-\xi)\big|\big|\varphi_m^1(\xi,t+x-\xi)\big| +$$
$$+ \big|\sigma^2\big(\xi, \big(u_m^2\big)^2(\xi,t+x-\xi)\big)\big|\big|\varphi_m^1(\xi,t+x-\xi) - \varphi_m^2(\xi,t+x-\xi)\big| +$$
$$+ \big|\sigma^1\big(\xi, \big(u_m^1\big)^2(\xi,t-x+\xi)\big) - \sigma^2\big(\xi, \big(u_m^2\big)^2(\xi,t-x+\xi)\big)\big|\big|\varphi_m^1(\xi,t-x+\xi)\big| +$$
$$+ \big|\sigma^2\big(\xi, \big(u_m^2\big)^2(\xi,t-x+\xi)\big)\big|\big|\varphi_m^1(\xi,t-x+\xi) - \varphi_m^2((\xi,t-x+\xi)\big|\Big]\, d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \frac{T}{2}(2\nu_2\|\mathbf{g}^0\| + \nu_0\|\mathbf{g}^0\|)\|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\| = \gamma_4 T\|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|,$$
$$(x,t) \in G_T, \quad m = 1,2, \quad (78)$$

где $\gamma_4 = (\nu_0 + 2\nu_2)\|\mathbf{g}^0\|/2$.

Пусть $\rho \in (0,1)$. Выберем $T_0 \leqslant \min\{T', T_1\}$ такое, что выполняются неравенства

$$T_0'\gamma_k \leqslant \rho, \quad k = \overline{1,4}.$$

Тогда для имеет место оценка

$$\|\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{g}^1 - \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{g}^2\|_{\mathbf{C}(G(T_0))} \leqslant \rho\,\|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{\mathbf{C}(G(T_0))}.$$

Таким образом, $\mathbf{\Lambda}$ является сжимающим отображением на множестве $\mathbf{R}_{T_0}$. В силу принципа сжимающих отображений на $\mathbf{R}_{T_0}$ существует единственное решение операторного уравнения (56). При этом $\sigma_0(x) > 0$ и $\sigma_1(x) > 0$ при $x \in [0, T_0/2]$.

Теорема 2 доказана.

§ 4. Приложение

Выведем уравнение (1). Рассмотрим уравнения электродинамики

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}(\mathbf{E}), \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^4, \tag{79}$$

где $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$, $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ — векторы магнитной и электрической напряженностей поля, $\mathbf{j}(\mathbf{E})$ — сила электрического тока, ε и μ — положительные постоянные, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Примем, что сила тока определяется следующей формулой:

$$\mathbf{j}(\mathbf{E}) = \left(a_0(\mathbf{x}) + \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}(\mathbf{x}) E_i E_k(\mathbf{x}, t) \right) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t).$$

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{H} = (H_1, 0, 0), \mathbf{E} = (0, E_2, 0)$ и компоненты H_1 и E_2 зависят только от одной пространственной переменной x_3. Тогда уравнение для $\mathbf{j}(\mathbf{E})$ принимает вид

$$j_2(\mathbf{E}) = \left(a_0(x_3) + a_{22}(x_3) E_2^2(x_3, t) \right) E_2(x_3, t) = j_2(x_3, E_2(x_3, t))$$

и система уравнений (79) сводится к системе из двух скалярных уравнений

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_3} = \varepsilon \frac{\partial E_2}{\partial t} + j_2(x_3, E_2), \quad \frac{\partial E_2}{\partial x_3} = \mu \frac{\partial H_1}{\partial t}, \tag{80}$$

Исключая из (80) функцию H_1, получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial x_3^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} + \mu \big(a_0(x_3) + 3a_{22}(x_3) E_2^2 \big) \frac{\partial E_2}{\partial t}.$$

Обозначая $x_3 = x$, $u(x, t) = E_2(x, t\sqrt{\varepsilon\mu})$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{\partial E_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2}$$

и в итоге получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\big(a_0(x_3) + 3a_{22}(x_3)u^2\big)\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Обозначая

$$\sigma_0(x) = a_0(x)\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad \sigma_1(x) = 3a_{22}(x)\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad \sigma(x,u^2) = \sigma_0(x) + \sigma_1(x)u^2,$$

приходим к уравнению (1).

Список литературы

1. *Lassas M., Uhlmann G., Wang Y.* Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds // *Comm. Math. Phys.* 2018. V. 360. P. 555–609.

2. *Wang Y., Zhou T.* Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations // *Comm. PDE.* 2019. V. 44, N 11. P. 1140–1158.

3. *Hintz P., Uhlmann G., Zhai J.* An inverse boundary value problem for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds // *Internat. Math. Res. Notices.* 2022. V. 17. P. 13181–3211.

4. *Barreto A.S., Stefanov P.* Recovery of a general nonlinearity in the semilinear wave equation // *Analysis of PDEs.* 2021. DOI 10.48550/arXiv.2107.08513

5. *Chen X., Lassas M., Oksanen L., Paternain G.P.* Detection of Hermitian connections in wave equations with cubic non-linearity // *J. Eur. Math. Soc.* 2022. V. 24, N 7. P. 2191–2232.

6. *Barreto A.S., Uhlmann G., Wang Y.* Inverse scattering for critical semilinear wave equations // *Pure Appl. Anal.* 2022. V. 4, N 2. P. 191–223.

7. *Lassas M., Liimatainen T., Potenciano-Machado L., Tyni T.* Uniqueness and stability of an inverse problem for a semi-linear wave equation // *J. Differ. Equ.* 2020. V. 337. P. 395–435.

8. *Barreto A.S., Stefanov P.* Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly non-linear regime // *Analysis of PDEs.* 2022. V. 392. P. 25–53.

9. *Романов В.Г., Бугуева Т.В.* Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2022. Т. 25, № 3. С. 154–169. DOI 10.33048/SIBJIM.2022.25.313

10. *Романов В.Г., Бугуева Т.В.* Задача об определении коэффициента при степенной градиентной нелинейности в полулинейном волновом уравнении // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2023. Т. 26, № 2. С. 113–129. DOI 10.33048/SIBJIM.2023.26.210

11. *Романов В.Г.* Оценка устойчивости в обратной задаче для нелинейного гиперболического уравнения // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 560–576. DOI 10.33048/smzh.2024.65.310

12. *Романов В.Г.* Обратная задача для волнового уравнения с двумя нелинейными членами // *Диф. уравн.* 2024. Т. 60, № 4. С 508–520. DOI 10.31857/S0374064124040061

13. *Milani A.* Singular limits of quasi-linear hyperbolic systems in a bounded domain of $\mathbb{R}^3$ with applications to Maxwell's equations // *Pacific J. Math.* 1985. V. 116, N 1, P. 111–129. DOI 10.2140/pjm.1985.116.111

14. *Babin A., Figotin A.* Nonlinear Maxwell Equations in Inhomogeneous Media // *Commun. Math. Phys.* 2003. V. 241. P. 519–581. DOI 10.1007/s00220-003-0939-9

15. *Colin T., Nkonga B.* Multiscale numerical method for nonlinear Maxwell equations // *Discrete and Continuous Dynamical Syst. – Series B (DCDS-B).* 2005. V. 5, N 3. P. 631–658. DOI 10.3934/dcdsb.2005.5.631

16. *Wei C., Li A.* Nonexistence and existence of nontrivial solutions for Klein—Gordon—Maxwell systems with competing nonlinearities // *Bound. Value Probl.* 2019. V. 31. DOI 10.1186/s13661-019-1146-8

17. *Schnaubelt R., Spitz M.* Local wellposedness of quasilinear Maxwell equations with absorbing boundary conditions // *Evolution Equations and Control Theory (EECT).* 2021. V. 10, N 1. P. 155–198. DOI 10.3934/eect.2020061

18. *Dohnal T., Ionescu-Tira M., Waurick M.* Well-posedness and exponential stability of nonlinear Maxwell Equations for dispersive materials with interface // *Analysis of PDEs.* DOI 10.1016/j.jde.2023.11.005

19. *Романов В.Г.* Обратная задача для уравнений электродинамики с нелинейной проводимостью.// *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.* 2023. Т. 509. С. 65–68. DOI 10.31857/S2686954322600719

20. *Романов В.Г., Бугуева Т.В.* Обратная задача для уравнения электродинамики с нелинейным поглощением // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2025. Т. 28, № 2. С. 68–95.

References

1. *Lassas M., Uhlmann G., Wang Y.* Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds // *Comm. Math. Phys.* 2018. V. 360. P. 555–609.

2. *Wang Y., Zhou T.* Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations // *Comm. PDE.* 2019. V. 44, N 11. P. 1140–1158.

3. *Hintz P., Uhlmann G., Zhai J.* An inverse boundary value problem for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds // *Internat. Math. Res. Notices.* 2022. V. 17. P. 13181–3211.

4. *Barreto A.S., Stefanov P.* Recovery of a general nonlinearity in the semilinear wave equation // *Analysis of PDEs.* 2021. DOI 10.48550/arXiv.2107.08513

5. *Chen X., Lassas M., Oksanen L., Paternain G.P.* Detection of Hermitian connections in wave equations with cubic non-linearity // *J. Eur. Math. Soc.* 2022. V. 24, N 7. P. 2191–2232.

6. *Barreto A.S., Uhlmann G., Wang Y.* Inverse scattering for critical semilinear wave equations // *Pure Appl. Anal.* 2022. V. 4, N 2. P. 191–223.

7. *Lassas M., Liimatainen T., Potenciano-Machado L., Tyni T.* Uniqueness and stability of an inverse problem for a semi-linear wave equation // *J. Differ. Equ.* 2020. V. 337. P. 395–435.

8. *Barreto A.S., Stefanov P.* Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly non-linear regime // *Analysis of PDEs.* 2022. V. 392. P. 25–53.

9. *Romanov V.G., Bugueva T.V.* The problem of determining the coefficient of the nonlinear term in a quasilinear wave equation // *J. Appl. Indust. Math.* 2022. V. 16, N 3. P. 550–562. DOI 10.1134/S1990478922030188

10. *Romanov V.G., Bugueva T.V.* The problem of determining the coefficient multiplying a power-law gradient nonlinearity in a semilinear wave equation // *J. Appl. Indust. Math.* 2023. V. 17, N 2. P. 370–384. DOI 10.1134/S1990478923020151

11. *Romanov V.G.* A stability estimate for a solution to an inverse problem for a nonlinear hyperbolic equation. //*Sib. Math. J.* 2024. V. 65, N 3. P. 611-626.

12. *Romanov V.G.* An inverse problem for the wave equation with two nonlinear terms. // *Dif. Equ.* 2024. V. 60, N 4. P. 479-491

13. *Milani A.* Singular limits of quasi-linear hyperbolic systems in a bounded domain of $\mathbb{R}^3$ with applications to Maxwell's equations // *Pacific J. Math.* 1985. V. 116, N 1, P. 111–129. DOI 10.2140/pjm.1985.116.111

14. *Babin A., Figotin A.* Nonlinear Maxwell Equations in Inhomogeneous Media // *Commun. Math. Phys.* 2003. V. 241. P. 519–581. DOI 10.1007/s00220-003-0939-9

15. *Colin T., Nkonga B.* Multiscale numerical method for nonlinear Maxwell equations // *Discrete and Continuous Dynamical Syst. – Series B (DCDS-B).* 2005. V. 5, N 3. P. 631–658. DOI 10.3934/dcdsb.2005.5.631

16. *Wei C., Li A.* Nonexistence and existence of nontrivial solutions for Klein—Gordon—Maxwell systems with competing nonlinearities // *Bound. Value Probl.* 2019. V. 31. DOI 10.1186/s13661-019-1146-8

17. *Schnaubelt R., Spitz M.* Local wellposedness of quasilinear Maxwell equations with absorbing boundary conditions // *Evolution Equations and Control Theory (EECT).* 2021. V. 10, N 1. P. 155–198. DOI 10.3934/eect.2020061

18. *Dohnal T., Ionescu-Tira M., Waurick M.* Well-posedness and exponential stability of nonlinear Maxwell Equations for dispersive materials with interface // *Analysis of PDEs.* DOI 10.1016/j.jde.2023.11.005

19. *Romanov V.G.* An inverse problem for electrodynamic equations with nonlinear conductivity // *Dokl. Math.* 2023. V. 107, N 1. P. 53–56.

20. *Romanov V.G., Bugueva T.V.* An inverse problem for the equation of electrodynamics with nonlinear absorption // *Sib. Zhurn. Indust. Mat.* 2025. V. 28, N 2. P. 68–95 (in Russian).

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 63-94
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 63-94

Информация об авторах

Владимир Гаврилович Романов, академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор

SPIN 1899-5514 AuthorID: 5550

Scopus Author ID 55560964700 WoS ID: F-9215-2019

Татьяна Владимировна Бугуева, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник

SPIN-код: 7005-3106, AuthorID: 15085

Scopus Author ID 6508066568

Author Information

Vladimir G. Romanov, Academician of the RAS, Doctor of Mathematics, Professor

SPIN 1899-5514 AuthorID: 5550

Scopus Author ID 55560964700 WoS ID: F-9215-2019

Tatiana V. Bugueva, Candidate of Mathematics, Associate Professor, Senior Researcher

SPIN-код: 7005-3106, AuthorID: 15085

Scopus Author ID 6508066568

Статья поступила в редакцию 20.06.2025;
одобрена после рецензирования 16.09.2025; принята к публикации 24.09.2025

The article was submitted 20.06.2025;
approved after reviewing 16.09.2025; accepted for publication 24.09.2025